ANALÝZA BLACK – SCHOLESOVHO MODELU PRE FUTURES OPCIE

Lucia Vrábelová[1]

Úvod

Už začiatkom dvadsiateho storočia sa začali rozvíjať obchody s opciami na cenné papiere, ale ich likvidita bola veľmi nízka, pretože neexistovala možnosť uzavretia pozície alebo nasledovného obchodovania s opciami. K výraznému rozmachu používania finančných derivátov došlo po publikovaní práce, v ktorej bol uvedený Black - Scholesov model oceňovania opcií, ktorý vypracovali F. Black, M. Scholes a R. Merton. Za túto prácu získali M. Scholes a R. Merton v roku 1997 Nobelovu cenu za ekonomiku.

Časový vývoj cien aktív je často nestály a vykazuje rôzne veľké fluktuácie, ktoré sú zapríčinené pôsobením burzového a mimoburzového trhu na cenu daného aktíva. Dopyt a ponuka daného aktíva formujú jej časový priebeh. Snahou investorov je minimalizovať možné straty zapríčinené prudkým poklesom cien aktív. Jedným z efektívnych nástrojov na zabezpečenie sa proti tomuto riziku je použitie zaisťovacích nástrojov, ktorými sú rôzne druhy derivátov aktív. Podcenenie zaistenia investičného portfólia pomocou derivátov môže spôsobiť vysoké finančné straty.

Základné pojmy

Finančný derivát je finančný nástroj, ktorého hodnota závisí na hodnote iného finančného aktíva (akcia, burzový index, výmenný kurz).

Opcia je finančný derivát, ktorý dáva jej vlastníkovi právo kúpiť / predať dané aktívum (napr. akciu) v danom čase T v budúcnosti za vopred dohodnutú realizačnú cenu X. Vyrovnanie opcie nie je povinné, opcia môže vypršať bez uplatnenia.

Call opcia je kúpna opcia, zaisťuje vlastníkovi právo na kúpu. *Put opcia* je predajná opcia, dáva vlastníkovi právo predať aktívum.

ATM opcia (At the money) je opcia, ktorej vnútorná hodnota je v podstate nulová. To je vtedy, ak sa realizačná cena opcie zhoduje (alebo takmer zhoduje) s trhovou cenou podkladového aktíva.

ITM opcia (In the money) je opcia, ktorá má vnútornú hodnotu (je v peniazoch). V prípade kúpnej opcie je to vtedy, ak je cena podkladového aktíva na trhu vyššia ako realizačná cena opcie. V prípade predajnej opcie je to vtedy, ak je cena podkladového aktíva na trhu nižšia ako realizačná cena opcie.

OTM opcia (Out of the money) je opcia bez vnútornej hodnoty. V prípade kúpnej opcie je to vtedy, ak je cena podkladového aktíva na trhu nižšia ako realizačná cena opcie. V prípade predajnej opcie je to vtedy, ak je cena podkladového aktíva na trhu vyššia ako realizačná cena opcie.

[1] Mgr. Lucia Vrábelová, Katedra spojov, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, tel.: 5133140, e-mail: Lucia.Vrabelova@fpedas.utc.sk

Futurita (futures) je dohoda medzi dvoma stranami o kúpe alebo predaji daného aktíva v budúcnosti za vopred dohodnutú cenu. Realizuje sa zvyčajne na burze, ktorá špecifikuje štandartné podmienky tohto obchodu a garantuje účastníkom, že obchod bude realizovaný. Futurity sú štandardizované kontrakty, množstvá, čas, kvalita obchodovateľného aktíva, metódy uzatvorenia kontraktu, určenie minimálnej a maximálnej ceny sú stanovené pevne vopred. Obchodovať s nimi sa dá iba v určité dni v roku. Futurity nemajú presne stanovený dátum dodávky podkladového aktíva, určený je len mesiac, v ktorom sa dodanie musí uskutočniť. Burza určí, v akom období počas tohto mesiaca sa musí aktívum dodať. Futures sa od opcií líšia v tom, že ich vyrovnanie je povinné, na rozdiel od opcií, pri ktorých sa môže ich držiteľ rozhodnúť, či danú opciu uplatní alebo ju nechá vypršať bez uplatnenia. Vyrovnanie pri futures prebieha každý deň, to znamená, že každý deň sa obchodovanie uzavrie, prebehne vyrovnanie medzi účastníkmi futures kontraktu a ráno sa obchodovanie znovu otvorí pri novej cene.

Futures opcia je špeciálnym typom opcie, ktorej podkladovým aktívom je futures. Pri uplatnení *call futures* opcie jej vlastník získava dlhú pozíciu vo futures kontrakte (kontrakt na kúpu) plus hotovosť, ktorú predstavuje posledná uzatváracia cena futures z predchádzajúceho obchodného dňa. Pri uplatnení *put futures* opcie jej majiteľ získava krátku pozíciu vo futures kontrakte (na predaj aktíva) plus hotovosť vo výške poslednej uzatváracej ceny futures z predchádzajúceho obchodného dňa.
Futures opcie sú pre obchodníkov výhodnejšie ako klasické opcie, pretože majú nižšie transakčné náklady, uplatnenie opcie ešte nevedie priamo k dodávke aktíva a často je jednoduchšie dodať futures kontrakt ako aktívum.

Black – Scholesov model oceňovania futures opcií

Black – Scholesov model oceňovania futures opcií vychádza zo zovšeobecneného Black – Scholesovho modelu pre klasické európske opcie, ktoré poskytujú dividendový výnos[2].
Označíme
r – bezriziková úroková miera,
q – dividendový výnos určený v % z ceny aktíva,
f – cena derivátu,
t – čas do splatnosti derivátu (opcie),
S – cena podkladového aktíva,
σ - volatilita ceny akcie.
Black – Scholesova parciálna diferenciálna rovnica má nasledujúci tvar:[3]

$$r f = \frac{\partial f}{\partial t} + (r - q) S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \tag{1}$$

Pri futures opciách v tejto rovnici nahradíme premennú S (cena akcie) cenou futures F a dividendový výnos q nahradíme úrokovou mierou r (pretože musí platiť $q = r$ z dôvodu zabránenia bezrizikovému zisku – arbitráži).
Tým dostávame nasledujúci tvar Black – Scholesovej rovnice pre futures opcie:

$$r f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} \tag{2}$$

Stanovením okrajových podmienok a počiatočnej podmienky, ktoré spĺňa futures opcia získame riešenie rovnice (2). Toto riešenie je dané:[4]

[2] Podrobnejšie je Black – Scholesov model popísaný v [2].
[3] Bližšie odvodenie pozri [2].
[4] Bližšie odvodenie vzorca pozri [2]

$$c = Fe^{-r(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \qquad (3)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\frac{Fe^{-r(T-t)}}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{F}{X} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Funkcia $N(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Analýza Black – Scholesovho modelu oceňovania futures opcií

Faktory, ktoré môžu ovplyvniť cenu futures opcie, sú najmä vstupné parametre tohto modelu:

- cena podkladového aktíva *F* na spotovom trhu,
- realizačná cena *X*,
- doba splatnosti opcie *t*,
- volatilita σ,
- výška bezrizikovej úrokovej miery *r*,
- výplata dividendy.

Všetky uvedené parametre ovplyvňujú cenu kúpnej i predajnej opcie, ale každý iným spôsobom a v inej miere. Pre obchodníka, ktorý používa finančné deriváty ako spôsob zaistenia sa voči riziku zmien ceny aktív na spotovom trhu, je potrebné zistiť, ktorý parameter maximálne ovplyvňuje cenu opcie a nájsť spôsob ako minimalizovať jeho prípadné nepriaznivé dôsledky na hodnotu portfólia alebo na výsledok investície.

Pre ilustráciu uvedieme ***analýzu vplyvu zmeny ceny futures na zmenu ceny futures opcie***. Cena futures na spotovom trhu je jedným z rozhodujúcich faktorov ovplyvňujúcich cenu kúpnej opcie. Ak predpokladáme, že ostatné vstupné parametre zostanú na konštantnej úrovni, pri zvýšení ceny futures na spotovom trhu pri rovnakej realizačnej cene musí stúpnuť aj cena kúpnej opcie. Teda za rovnakú realizačnú cenu máme právo kúpiť futures s vyššou cenou a musíme za to aj viac zaplatiť. Stúpne aj vnútorná hodnota kúpnej opcie. Investor potrebuje vedieť, o akú hodnotu sa zmení cena kúpnej opcie pri určitej zmene ceny futures na spotovom trhu. Táto zmena sa dá vyjadriť pomocou parciálnej derivácie funkcie ceny kúpnej futures opcie (3) podľa parametra *F*.

Po zderivovaní rovnice (3) podľa *F* dostávame

$$\frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}N(d_1) + Fe^{-r(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial F} - Xe^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial F},$$

pričom

$$\frac{\partial d_1}{\partial F} = \frac{\partial d_2}{\partial F} = \frac{1}{F\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}e^{\sigma\sqrt{T-t}d_1 - \sigma^2(T-t)/2} = N'(d_1)e^{\ln\frac{F}{X} + \sigma^2(T-t)/2 - \sigma^2(T-t)/2} =$$

$$= N'(d_1)\frac{F}{X}.$$

Po dosadení a následných úpravách dostávame

$$\frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}N(d_1).$$

Tento výsledok vyjadruje, že pri zmene ceny futures na spotovom trhu o jednu jednotku sa cena opcie zmení o hodnotu parametra $N(d_1)$ odúročenú o čas do splatnosti

$(T-t)$ pričom táto hodnota sa pohybuje v otvorenom intervale *(0, 1)*. Uvedený parameter sa nazýva delta kúpnej futures opcie. Výpočet parametra delta slúži aj na určenie toho, ako sa investor môže zabezpečiť proti možnej strate. Investor si vytvorí portfólio π, ktoré tvorí:

- mínus jeden derivát *f* (tzn. predaj 1 futures opcie, call alebo put),
- plus delta futures kontraktov.

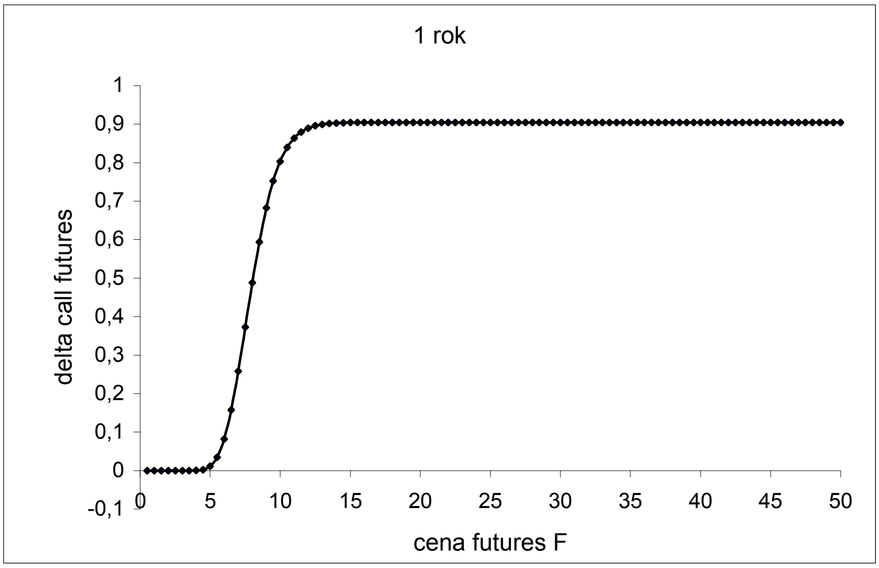
Toto portfólio je bezrizikové, ak platí delta $\pi = \frac{\partial \pi}{\partial F} = 0$. Takéto portfólio sa nazýva *delta – neutrálne* portfólio, ktorého hodnota závisí iba od jedného aktíva *F*. Jeho výnos v krátkodobom časovom horizonte zodpovedá bezrizikovej úrokovej miere. Delta neutrálne portfólio je zložené z akcií a opcií v takom pomere, aby sa zisk, resp. strata z pozície v opciách vyrovnal stratou, resp. ziskom v pozícii v akciách.

Možným problémom v tomto portfóliu π je, že parameter delta závisí od času a ak sa delta zmení, musí investor prehodnotiť portfólio, aby zostalo delta – neutrálne (prikúpiť alebo predať časť futures kontraktov). V praxi sa používajú dva typy delta hedgingu (zabezpečenia):

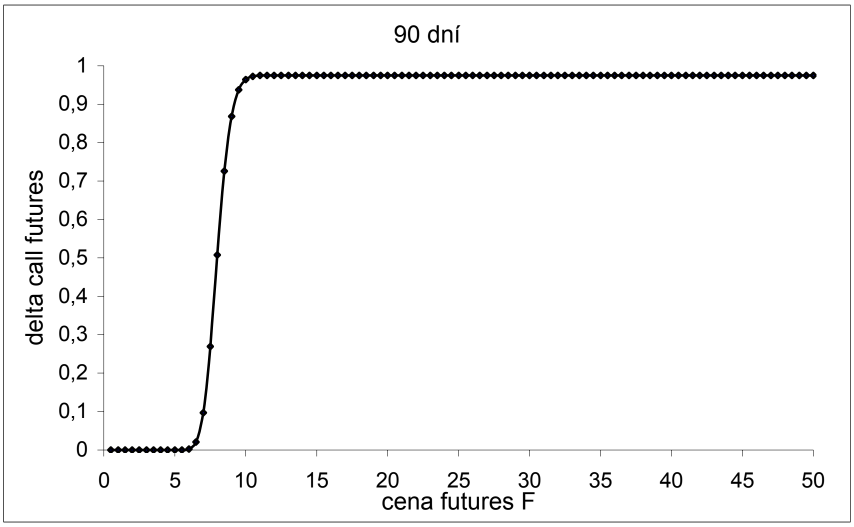
- dynamický delta hedging – portfólio sa pravidelne prehodnocuje, aby zostalo delta – neutrálne, čo sa však nedá robiť spojite a vyžaduje to vysoké transakčné náklady;
- statický delta hedging – na začiatku je portfólio delta – neutrálne a ďalej sa neprehodnocuje, predpokladá sa, že hodnota parametra delta zostane konštantná. Tento predpoklad je samozrejme veľmi zjednodušený.

Priebeh parametra delta z hľadiska času

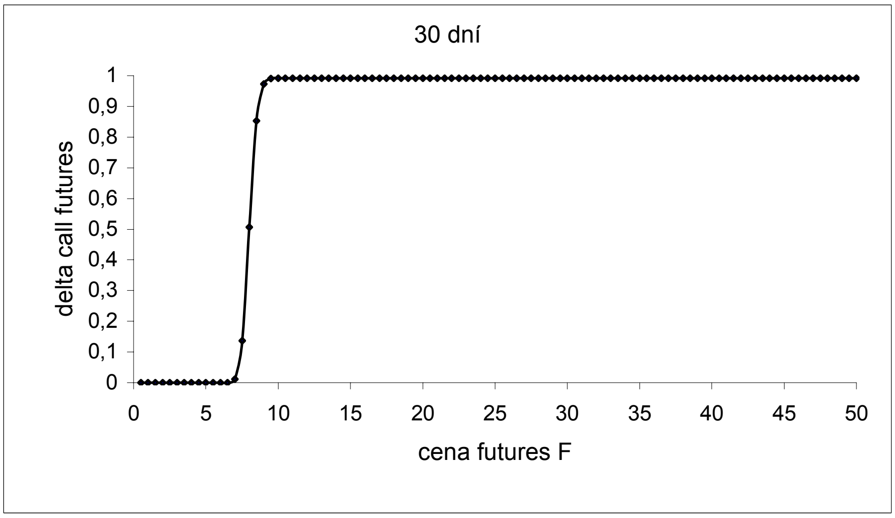
Nasledujúce obrázky ukazujú priebeh parametra delta call futures opcie pri zmene času do expirácie futures opcie. Zobrazený je parameter delta s meniacou sa cenou podkladového futures kontraktu 1 rok, 3 mesiace, 1 mesiac a 1 deň pred expiráciou. Cena futures kontraktu sa mení od \$0 do \$50 s krokom \$0,5.



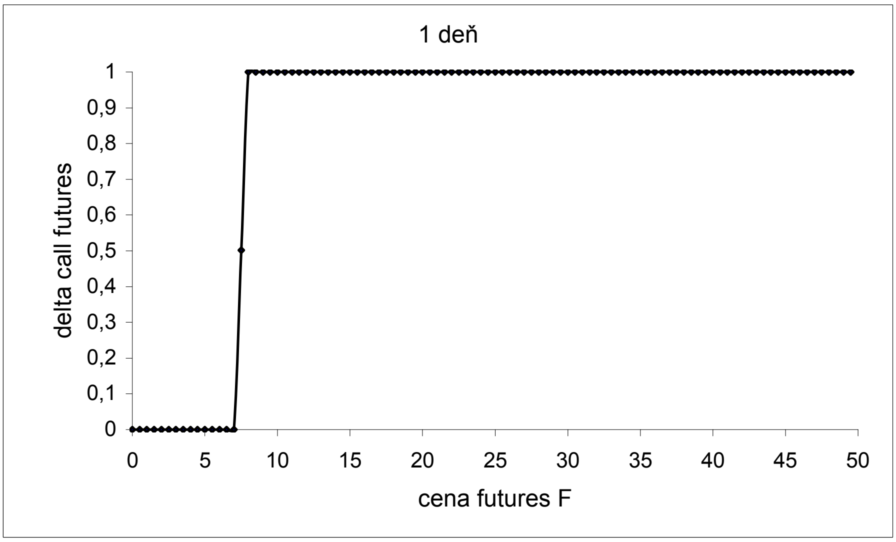
Obrázok 1 Delta call futures opcie 1 rok pred expiráciou



Obrázok 2 Delta call futures opcie 3 mesiace pred expiráciou



Obrázok 3 Delta call futures opcie 1 mesiac pred expiráciou



Obrázok 4 Delta call futures opcie 1 deň pred expiráciou

Cena kúpnej futures opcie je na zmeny ceny podkladového futures kontraktu najcitlivejšia v oblasti ATM, teda keď sa cena futures nachádza v blízkosti realizačnej ceny. V predchádzajúcich obrázkoch bola zvolená realizačná cena \$8. Z obrázkov vidno, že keď sa cena futures kontraktu pohybuje okolo \$8, je delta futures call opcie najviac citlivá na zmenu času do expirácie. Napr. pre cenu futures F = \$8 pri čase 1 rok do expirácie je hodnota delta = 0,488, pri čase 90 dní do expirácie je delta = 0,507, rovnako aj pri čase 30 dní do expirácie delta = 0,507 a pri čase do expirácie 1 deň je delta = 1. To znamená, na udržanie rizikovo neutrálneho portfólia, že ak sa cena futures F zmení o \$1, cena zodpovedajúcej call futures opcie sa zmení o hodnotu delta, teda v čase 1 rok do expirácie sa zmení o \$0,488, ale v čase 1 deň do expirácie už o \$1.

V oblastiach OTM a ITM je cena opcie na zmenu ceny podkladového aktíva na spotovom trhu menej citlivá.

Ako sme už uviedli v predchádzajúcom texte, na priebeh parametra delta má veľký vplyv aj zmena času do expirácie kúpnej opcie. Preto je dôležité analyzovať jeho priebeh z časového hľadiska pri nezmenenej cene futures na cenu opcie v oblastiach OTM, ITM, ATM. So zmenou času sa parameter delta pred expiráciou blíži v oblasti OTM k hodnote 0, v oblasti ITM k hodnote $e^{-r(T-t)}$, v oblasti ATM sa pohybuje okolo hodnoty $0{,}5\,e^{-r(T-t)}$. Tieto tvrdenia vyplývajú z nasledujúcich úvah:

1. Ak sa cena call futures opcie nachádza v oblasti OTM, platí:

$Fe^{-r(T-t)} < X$, teda $\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} < 1$. Z toho vyplýva, že $\ln\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} \to -\infty$, teda aj $d_{1,2} \to -\infty$. Potom $N(d_{1,2}) \to 0$. Keďže delta call futures opcie = $\dfrac{\partial c}{\partial F} = \dfrac{\Delta c}{\Delta F} = N(d_1)e^{-r(T-t)}$, platí $\Delta c = N(d_1)e^{-r(T-t)} \cdot \Delta F \to 0$. Z toho vyplýva, že ak sa cena futures kontraktu zmení o jednotku, cena zodpovedajúcej call futures opcie sa zmení len veľmi málo.

2. Ak sa cena call futures opcie nachádza v oblasti ITM, platí:

$Fe^{-r(T-t)} > X$, teda $\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} > 1$. Z toho vyplýva, že $\ln\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} \to \infty$, teda aj $d_1, d_2 \to \infty$. Potom $N(d_1), N(d_2) \to 1$. Pre delta call futures opcie potom platí $\Delta c = N(d_1)e^{-r(T-t)} \cdot \Delta F \to e^{-r(T-t)}\Delta F$. Z toho vyplýva, že ak sa cena futures kontraktu zmení o jednotku, cena zodpovedajúcej call futures opcie sa zmení jednotku odúročenú bezrizikovou úrokovou mierou *r* o čas do splatnosti $(T-t)$.

3. Ak sa cena call futures opcie nachádza v oblasti ATM, platí:

$Fe^{-r(T-t)} = X$, teda $\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} = 1$. Z toho vyplýva, že $\ln\dfrac{Fe^{-r(T-t)}}{X} = 0$, teda $d_{1,2} \to \dfrac{(r \pm \sigma^2/2)\sqrt{T-t}}{\sigma}$ a ak $t \to T$, potom $d_{1,2} \to 0^+$. Potom $N(d_{1,2}) \to 0{,}5$ a $\Delta c \to 0{,}5e^{-r(T-t)}\Delta F$

Z toho vyplýva, že ak sa cena futures kontraktu zmení o jednotku, cena zodpovedajúcej call futures opcie sa zmení o $0{,}5e^{-r(T-t)}$.

Záver

Priebeh parametra delta sa mení pri zmene času do expirácie call futures opcie, čo má význam pri jeho praktickom použití. Parameter delta sa využíva na delta – hedging, čo je zabezpečenie portfólia proti malým zmenám v cene podkladového aktíva počas malého časového intervalu v budúcnosti. Pozícia s nulovou deltou sa vzťahuje na delta neutrálne portfólio, ktorého výnos v krátkom čase v budúcnosti zodpovedá bezrizikovej úrokovej sadzbe. Je dôležité si uvedomiť, že pozícia investora zostáva zabezpečená – delta neutrálna – na relatívne krátky časový interval. To je spôsobené tým, že delta sa mení aj so zmenou v cene podkladového aktíva (futures kontraktu) aj s plynutím času. V praxi musí byť zabezpečenie portfólia upravované periodicky.

Parameter delta spoľahlivo určí zmenu ceny kúpnej opcie iba pri relatívne malých zmenách ceny futures na spotovom trhu. Pri väčších jednorázových zmenách ceny futures na spotovom trhu, predovšetným v oblasti ATM dochádza použitím tohto parametra k tým väčšej chybe, čím väčšia je zmena ceny futures na spotovom trhu. V takom prípade je potrebné použiť druhú deriváciu funkcie ceny kúpnej futures opcie podľa F – parameter gamma.

Literatúra

[1] HULL, J. C.: Options, Futures, and Other Derivatives. 3. vyd. New York: PRENTICE HALL, 1997. 572 s. ISBN 0131864793

[2] ŠEVČOVIČ, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Dostupné na: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index. html>

[3] JÄCKEL, P.: Monte Carlo Methods in Finance. 1. vyd. Chichester, West Sussex, England: J. WILEY AND SONS, 2002. 222 s. ISBN 0-471-49741-X

[4] CHOVANCOVÁ, B. – JANKOVSKÁ, A. – HÁJNIKOVÁ, J. – MAJCHER, M. – ŠTURC, B.: Finančný trh: nástroje, transakcie, inštitúcie. 1. vyd. Bratislava: EUROUNION, 1999. 538 s. ISBN 8088984033