 ISSN 1336-8281

ÁZIJSKÉ OPCIE

Lucia Vrábelová*

Úvod

Oceňovanie opcií na akcie a na iné finančné nástroje je veľmi dôležitou súčasťou obchodovania s opciami. Cena opcie musí byť správne stanovená, aby sa predišlo možným špekuláciám a arbitrážnym príležitostiam, ktoré predstavujú pre obchodníka bezrizikový zisk. Ázijské opcie sú špeciálnym typom exotických opcií, ktorých payoff (výplata) závisí od priemernej ceny podkladového aktíva počas doby životnosti opcie. Na správne stanovenie ceny ázijských opcií sa dá použiť metóda binomických stromov, ktorá je numerickou metódou oceňovania opcií. Vychádza z jednoduchej konštrukcie vývoja ceny podkladového aktíva (akcie), na ktoré sa ázijská opcia vzťahuje. Inou metódou, ktorá sa dá použiť na oceňovanie ázijských opcií je Black – Scholesov model. Tento model oceňovania opcií je dnes najpoužívanejším nástrojom na stanovenie ceny opcie. Ceny vypočítané pomocou tohto modelu sú prakticky totožné so skutočnými cenami na finančných trhoch. Článok uvádza porovnanie ceny ázijskej opcie stanovenej pomocou metódy binomických stromov a pomocou Black – Scholesovho modelu.

Základné pojmy

Finančný derivát je finančný nástroj, ktorého hodnota závisí na hodnote iného finančného aktíva (akcia, burzový index, výmenný kurz).

Opcia je finančný derivát, ktorý dáva jej vlastníkovi právo kúpiť / predať dané aktívum (napr. akciu) v danom čase T v budúcnosti za vopred dohodnutú realizačnú cenu X. Vyrovnanie opcie nie je povinné, opcia môže vypršať bez uplatnenia.

Call opcia je kúpna opcia, zaisťuje vlastníkovi právo na kúpu. *Put opcia* je predajná opcia, dáva vlastníkovi právo predať aktívum.

Ázijská opcia je exotická opcia, ktorej payoff závisí od priemernej ceny podkladového aktíva (akcie) dosiahnutej počas doby životnosti opcie. Existujú dva druhy ázijských opcií:

- ***average price opcia*** s priemernou cenou, jej payoff je vyjadrený priemerom ceny v období od dohodnutia kontraktu až po jeho vysporiadanie a cenou v čase expirácie:
  - payoff average price call opcie je $c = S_{avg} - X$,
  - payoff average price put opcie je $p = X - S_{avg}$,
- ***average strike opcia*** s priemernou expiračnou cenou
  - payoff average strike call opcie je $c = S_T - S_{avg}$,
  - payoff average strike put opcie je $p = S_{avg} - S_T$.

Oceňovanie opcií metódou binomických stromov

Binomické stromy sú veľmi používanou numerickou metódou na oceňovanie opcií alebo iných finančných derivátov. Veľkou výhodou tejto metódy je jej univerzálnosť,

* Mgr. Lucia Vrábelová, Katedra spojov, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, tel.: 5133140, e-mail: Lucia.Vrabelova@fpedas.utc.sk

pomocou binomických stromov sa dá oceniť ľubovoľný finančný derivát. Takisto je možné pomocou tejto metódy oceňovať aj deriváty na akciu poskytujúcu dividendy a path – dependent deriváty[1], akým je aj ázijská opcia. Binomický strom reprezentuje možný vývoj ceny akcie počas doby životnosti derivátu. V modeli pracujeme len s diskrétnym časom, teda predpokladáme zmenu ceny akcie vždy po uplynutí časového obdobia Δt.

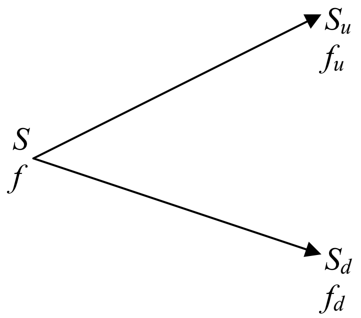
Nech portfólio π tvorí: -1 derivát f,
Δ akcií S.

Nech počiatočná cena akcie je S. Binomický model predpokladá, že S môže po časovom kroku Δt len vzrásť na hodnotu $S_u = S \cdot u$ alebo poklesnúť na hodnotu $S_d = S \cdot d$, pričom u je koeficient vzrastu, d je koeficient poklesu. Nech f_u je cena derivátu akcie pri vzraste akcie na hodnotu S_u a f_d je cena derivátu akcie pri poklese ceny akcie na S_d. Táto cena sa pri ázijských opciách vypočíta pomocou nasledujúcich vzťahov:

- average price call opcia $f = max\left(S_{avg} - X, 0\right)$, (1)
- average price put opcia $f = max\left(X - S_{avg}, 0\right)$, (2)
- average strike call opcia $f = max\left(S_T - S_{avg}, 0\right)$, (3)
- average strike put opcia $f = max\left(S_{avg} - S_T, 0\right)$, (4)

pričom S_{avg} je priemerná cena podkladového aktíva (akcie) dosiahnutá počas doby životnosti derivátu.

Túto situáciu znázorňuje nasledujúci jednokrokový binomický strom:



Obrázok 1 Jednokrokový binomický model

Počet akcií Δ v portfóliu bude taký, aby portfólio bolo bezrizikové, teda aj pri poklese aj pri vzraste ceny akcie portfólio prináša istý zisk rovný bezrizikovej úrokovej miere r.

Z toho vyplýva, že potrebný počet akcií v portfóliu Δ je:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}. \tag{5}$$

Súčasná hodnotu portfólia je rovná jeho budúcej hodnote diskontovanej do času 0 pri bezrizikovej úrokovej miere r:

$$SH_\pi = e^{-r\Delta t}\left(p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d\right),\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{6}$$

Potom cenu derivátu je

$$f = e^{-r\Delta t}\left(p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d\right). \tag{7}$$

[1] opcie, ktorých payoff závisí od cesty, ktorou sa vyvíjala cena akcie počas doby životnosti derivátu

Číslo p predstavuje pravdepodobnosť nárastu ceny akcie, číslo $1-p$ predstavuje pravdepodobnosť poklesu ceny akcie.

Uvedený jednokrokový binomický model sa dá jednoduchým spôsobom rozšíriť na viackrokový, pričom vzorce zostávajú v platnosti.

Pomocou vzorcov (5) – (7) sa dá oceniť ľubovoľný derivát európskeho typu.

Black – Scholesov model oceňovania opcií

Black – Scholesov model oceňovania finančných derivátov vychádza z teórie *stochastických procesov*[2].

Označíme

r – bezriziková úroková miera,

f – cena derivátu,

t – čas do splatnosti derivátu (opcie),

S – cena podkladového aktíva (akcie),

σ - volatilita ceny akcie.

Black – Scholesova parciálna diferenciálna rovnica má nasledujúci tvar:[3]

$$r f = \frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \qquad (8)$$

Stanovením okrajových podmienok a počiatočnej podmienky, ktoré spĺňa európska call opcia získame riešenie rovnice (8) pre túto európsku call opciu. Toto riešenie je dané:[4]

$$c = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \qquad (9)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Funkcia $N(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Závažným problémom pre túto verziu Black – Scholesovho modelu je abstrahovanie od vyplácania dividend (tento model predpokladá, že akcia počas doby životnosti derivátu nevypláca žiadne dividendy). V podmienkach fungujúceho trhového hospodárstva sa tento výnos vypláca, preto je vhodné túto skutočnosť zahrnúť do predpokladov modelu. Touto skutočnosťou sa v najväčšom rozsahu zaoberal Robert Merton, ktorý pri konštrukcii svojho modelu predpokladal, že podkladová akcia vypláca spojitý dividendový výnos počas životnosti opcie. Z Black – Scholesovho – Mertonovho modelu potom vyplýva nasledujúci spôsob ocenenia európskej call opcie.

$$c = S e^{-qt} N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2), \qquad (10)$$

pričom

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

kde q je spojitý dividendový výnos vyplácaný v % z ceny akcie.

---

[2] Bližšia teória stochastických procesov, pozri [1]

[3] Bližšie odvodenie pozri [2].

[4] Bližšie odvodenie vzorca pozri [2]

Ázijské opcie a ich oceňovanie

Pri oceňovaní ázijských opcií pomocou Black – Scholesovho modelu musíme rozlišovať, aký druh priemeru sa používa pri ich oceňovaní. Aritmetický priemer je totiž odlišný od geometrického priemeru. Hlavný rozdiel spočíva v rozdelení: geometrický priemer má pri lognormálnom rozdelení cien podkladového aktíva taktiež lognormálne rozdelenie, avšak aritmetický priemer takéto rozdelenie pri lognormálnom rozdelení cien nemá. Rovnica pre geometrické ázijské opcie je preto priamym rozšírením Black – Scholesovej rovnice, zatiaľ čo u aritmetických ázijských opcií je takéto analytické riešenie veľmi ťažké dosiahnuť.

Ak cena podkladového aktíva S je lognormálne distribuovaná (t.j. logaritmy cien aktíva sú normálne rozdelené náhodné premenné) a S_{avg} je geometrický priemer cien S, potom je možné európsku average price opciu oceniť pomocou analytických vzorcov. V rizikovo neutrálnom svete to znamená, že očakávaná miera rastu je rovná $\left(r - q - \sigma^2 / 6\right)/2$ (namiesto $r - q$, ktoré sa používa v Mertonovom modeli) a rizikovosť je vyjadrená $\sigma / \sqrt{3}$ (namiesto σ). Geometrická average price opcia preto môže byť vyjadrená ako bežná opcia, avšak s volatilitou $\sigma / \sqrt{3}$ a poskytujúca dividendový výnos $r - \left(r - q - \sigma^2 / 6\right)/2 = \left(r + q + \sigma^2 / 6\right)/2$.

Väčšinou sú ale ázijské opcie definované pomocou aritmetických priemerov a vtedy nie je možné použiť analytické vzorce pre oceňovanie. Je to preto, lebo rozdelenie aritmetického priemeru dáva také lognormálne rozdelenie, ktoré nie je použiteľné. Pre takéto opcie sa potom používa aproximácia, pomocou ktorej sa dá vypočítať aj cena ázijskej opcie s aritmetickým priemerom. Podrobnejšie je tento spôsob oceňovania uvedený v [1], str.466. Táto aproximácia spočíva v tom, že vypočítame prvé dva momenty rozdelenia aritmetického priemeru M_1 a M_2 a potom predpokladáme, že toto rozdelenie aritmetického priemeru je lognormálne s rovnakými prvými dvoma momentmi M_1 a M_2. Aplikovaním tejto aproximácie môžeme vyjadriť average price call opciu ako bežnú opciu s dividendovým výnosom $q_A = r - \left(\ln M_1\right)/t$ a volatilitou $\sigma_A^2 = \left(\ln M_2\right)/t - 2\left(r - q_A\right)$.

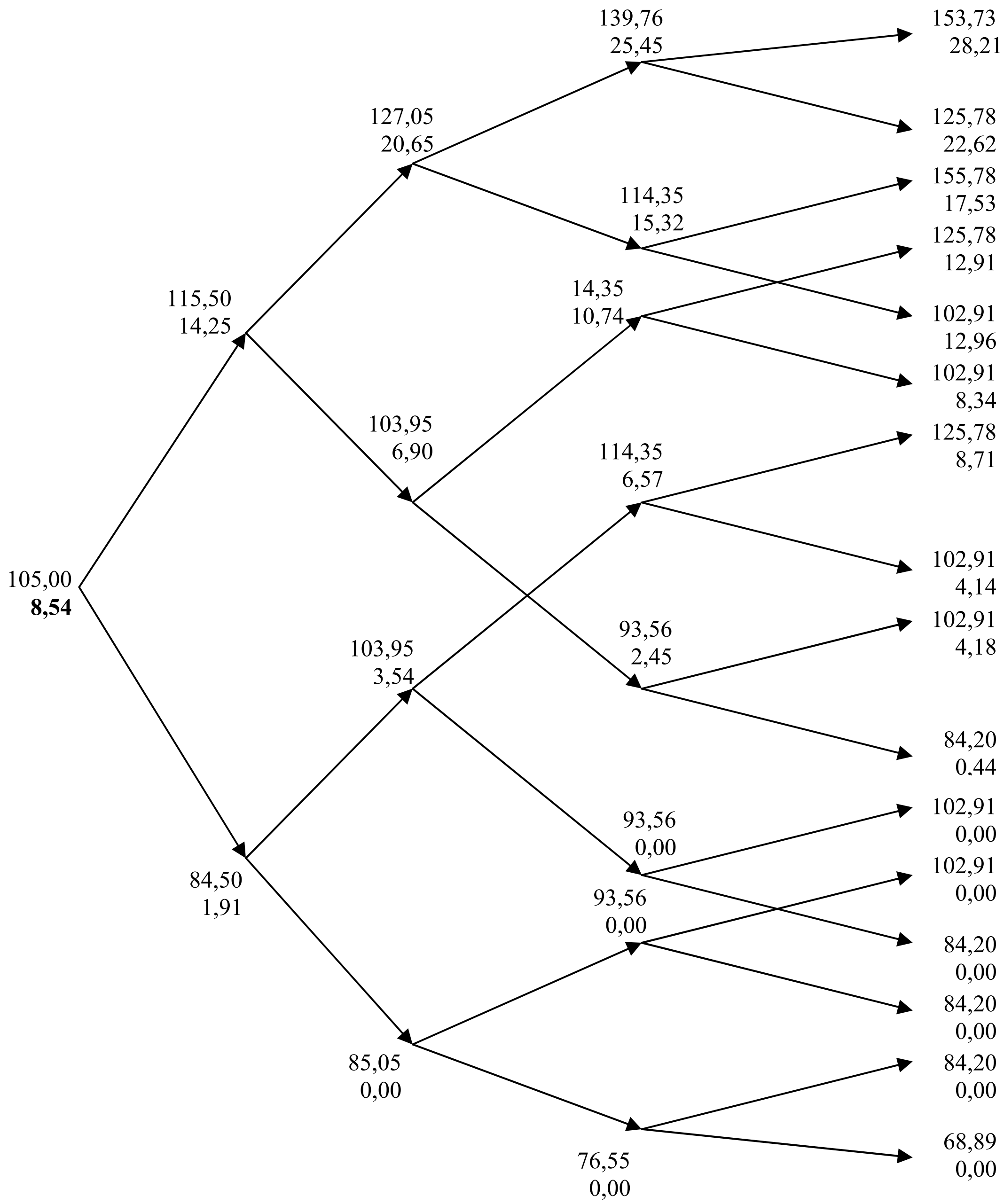
Príklad oceňovania ázijských opcií pomocou binomického stromu

Na nasledujúcom príklade ukážeme spôsob oceňovania ázijských opcií pomocou metódy binomických stromov a pomocou Black – Scholesovho modelu. V prípade metódy binomických stromov použijeme 4-krokový model s časovým úsekom dĺžky $\Delta t = 0{,}1$ roka. Keďže ázijské opcie sú „path – dependent“, ich cena je závislá na ceste, ktorou sa vyvíjala cena akcie počas celej ich doby životnosti. U týchto opcií teda musíme zohľadniť aj to, ktorou cestou sa cena akcie do koncového uzla v strome dostala, pretože hodnota derivátu sa vypočíta ako priemer hodnôt počas celého vývoja. Hodnoty opcie sa v závislosti od cesty líšia, preto je potrebné strom rozšíriť.

Nech počiatočná cena akcie je S = 105, realizačná cena opcie je X = 100, bezriziková úroková miera je stanovená na r = 8 % p.a., koeficient rastu je u = 1,1 a koeficient poklesu je d = 0,9. Na základe týchto hodnôt môžeme určiť hodnotu pravdepodobnosti nárastu ceny akcie p = 0,543 a hodnotu pravdepodobnosti poklesu ceny akcie 1 – p = 0,457. Nech daná azijská opcia je typu average price call, teda hodnoty v koncových uzloch stromu určíme podľa:

$$c = \max\left(S_{avg} - X, 0\right).$$

Ďalej pokračujeme v strome smerom sprava doľava podľa vzťahu (7). Vypočítané hodnoty sú uvedené v nasledujúcom obrázku.



Obrázok 2 Binomický strom európskej average price call opcie (v strome je horná hodnota vždy cena akcie a dolná cena opcie)

Cena uvedenej average price call opcie bola binomickým modelom stanovená na c = 8,54.

Príklad oceňovania ázijských opcií pomocou Black – Scholesovho modelu

Majme tú istú average price call opciu bez dividend (teda q = 0), pričom volatilita je $\sigma = 0{,}3$ a čas do splatnosti je t = 0,4, čo zodpovedá 4 časovým úsekom dĺžky 0,1 v binomickom modeli.

Ak priemer je geometrický, môžeme túto opciu oceňovať ako klasickú európsku call opciu, pričom použijeme hodnoty $\tilde{\sigma} = \sigma / \sqrt{3} = 0{,}1732$ a namiesto dividendového výnosu q = 0 použijeme $\tilde{q} = 0{,}5\left(r + q + \sigma^2 / 6\right) = 0{,}5\left(0{,}08 + 0 + 0{,}3^2 / 6\right) = 0{,}0475$.

Po dosadení všetkých hodnôt do (10) dostávame cenu príslušnej average price call opcie $c = 8{,}13$.

V prípade aritmetického priemeru použijeme aproximáciu pomocou prvých dvoch momentov rozdelenia. Vypočítame prvé dva momenty M_1 a M_2 a tiež dividendový výnos q_A a volatilitu σ_A. Tieto hodnoty dosadíme do (10) a dostaneme výslednú cenu tejto average price call opcie[5] $c = 7{,}92$.

Záver

V predchádzajúcom texte sme uviedli možné spôsoby oceňovania ázijských opcií, ktoré sú v súčasnosti veľmi populárne, pretože pri určovaní ceny aktíva sú menej náchylné na možnú manipuláciu a ich cena je vo všeobecnosti menej kolísavá ako u klasických opcií. V dôsledku toho ponúkajú tieto opcie lacnejší spôsob zaistenia sa proti riziku zmeny ceny aktíva ako klasické opcie.

Na ocenenie takýchto opcií sa dá použiť binomický strom, ktorý je univerzálnou metódou na oceňovanie všetkých opcií, vrátane path – dependent, akou je aj ázijská opcia. Na príklade sme uviedli ocenenie average price call opcie pomocou 4-krokového stromu. Cena bola týmto modelom stanovená na \$8,54. Ďalšou metódou na ocenenie ázijskej opcie môže byť Black – Scholesov model s modifikovanými parametrami σ a $r - q$. Pomocou tohto modelu sme stanovili cenu rovnakej average price call opcie na \$8,13. Táto cena je však stanovená pomocou geometrického priemeru. Pre porovnanie s binomickým stromom sme uviedli aj cenu aritmetickej average price call opcie, ktorá bola stanovená na \$7,92. Porovnaním výsledkov môžeme konštatovať, že ceny vypočítané pomocou týchto dvoch modelov sú podobné, ale nie celkom rovnaké, čo je pravdepodobne spôsobené použitím menšieho počtu časových krokov s dĺžkou 0,1 v binomickom modeli. Je zrejmé, že čím viac časových krokov menšej dĺžky použijeme, tým budú výsledky presnejšie. S použitím väčšieho počtu krokov však narastá časová náročnosť výpočtu, pretože s rastúcim počtom krokov sa zvyšuje počet bodov v strome, pri ázijskej opcii dokonca niekoľkonásobne.

Literatúra

[1] HULL, J. C.: Options, Futures, and Other Derivatives. 3. vyd. New York: Prentice Hall, 1997. 572 s. ISBN 0131864793

[2] ŠEVČOVIČ, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index.html

[3] JÄCKEL, P.: Monte Carlo Methods in Finance. 1. vyd. Chichester, West Sussex, England: J. Wiley and Sons, 2002. 222 s. ISBN 0-471-49741-X

[4] CHOVANCOVÁ, B. – JANKOVSKÁ, A. – HÁJNIKOVÁ, J. – MAJCHER, M. – ŠTURC, B.: Finančný trh: nástroje, transakcie, inštitúcie. 1. vyd. Bratislava: EUROUNION, 1999. 538 s. ISBN 8088984033

[5] SIKEL, S.: Oceňovanie ázijských opcií [Diplomová práca]. Katedra spojov, Žilinská univerzita v Žiline, 2005.

[5] pre stručnosť uvádzame len výslednú cenu opcie. Celkový postup je uvedený v [1], str.466.